Тема: Геометрия в ЕГЭ
Цель: научиться решать задачи по геометрии чётко, компактно, быстро и просто.

1. Рассмотреть решение задач по планиметрии в ЕГЭ
и способы их решения.

2. Рассмотреть решение задач по стереометрии в ЕГЭ
и способы их решения.

Актуальность. В настоящее время задачи по геометрии в вариантах представлены двумя задачами в базовой части и двумя задачами серии С. их разбор актуален на различных консультациях, факультативах и кружках.

Явной особенностью нынешних задач по планиметрии является подбор задач с двумя решениями. В стереометрии типичным случаем является попадания (или не попадания) основания высоты треугольника внутрь противолежащей стороны. Ещё встречаются случаи разного характера касания прямой и окружности, наличие двух полуплоскостей и т. п.

I. Вступление

Год от года место геометрических задач в вариантах трансформируется в зависимости от текущих образовательных тенденций. Результат выполнения ЕГЭ не влияет на оценку в аттестате школьника, это влияние ограничивается дилеммой типа «зачёт – незачёт». Это проблема для учителя. Набрав необходимый минимум на обязательных экзаменах, школьник получает аттестат, а отметки в аттестате по алгебре и геометрии определяет учитель.

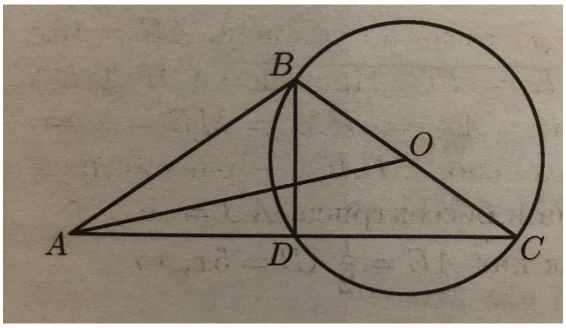
Для решения (проверки владения материалом) задач базового уровня требуется знание формул площади основных геометрических фигур или объёмов базовых геометрических тел. А задачи серии С - посложнее, причём задача по стереометрии традиционно проще задачи по планиметрии. Все задачи, так или иначе, черпаются из богатой коллекции конкурсных задач МГУ или МФТИ прошлых лет. Обычно возникают различные проблемы или ситуации от того, когда школьник на чертеже рисует к-н точку между двумя другими. Поэтому нужно задуматься, а не возможна ли другая конфигурация точек?

II. Основная часть.

1. Планиметрические задачи из ЕГЭ.

№1

На боковой стороне *BC* равнобедренного треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность. Пересекающая основание этого треугольника в точке *D*. Найдите квадрат расстояния от вершины *A* до центра окружности. Если $AD = \sqrt{3}$, а угол *ABC* равен 120°.



Пусть *O* – центр окружности. *BC* – диаметр. Так как угол *BDC* опирается на диаметр, то он прямой. Значит, *BD* – высота в ΔABC. Тогда $\angle ABD = \angle DBC = 60°$, т.к. в равнобедренном треугольнике высота совпадает с биссектрисой.

Из прямоугольного треугольника *ABD* находим:

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

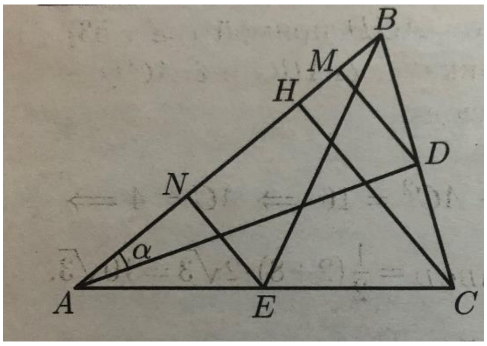
И так как AB = BC, то $BO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = 1$. По теореме косинусов для ΔABO имеем: $AO^2 = 2^2 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$.

Ответ: 7.

№2

В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BE. Точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем $\frac{AM}{MB} = \frac{9}{1}, \frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$.

Найдите отношение $\frac{AD^2}{BE^2}$.



Так как EN, DM перпендикулярны AB, то они параллельны. Пусть $MB = x$, тогда по условию $AB = 10x, AN = 4x, AM = 9x, AE = EC$. Проведем $CH \parallel EN$, тогда $AN = NH = 4x \;\;\Rightarrow\;\; HM = MB = x \;\;\Rightarrow\;\; BD = DC$. Следовательно, ΔBAC – равнобедренный, т.к. совпали медиана и биссектриса, $AB = AC$.

Пусть $\angle DAB = \alpha$. Так как $AE = \frac{1}{2}AB = 5x$, то

$$\cos 2\alpha = \frac{4}{5} \;\;\Rightarrow\;\; \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

По теореме косинусов

$$BE^2 = (10x)^2 + (5x)^2 - 2\cdot 50x^2 \cdot \frac{4}{5} = 45x^2 \;\;\Rightarrow\;\; BE = 3\sqrt{5x}$$

В прямоугольном треугольнике ADM имеем:

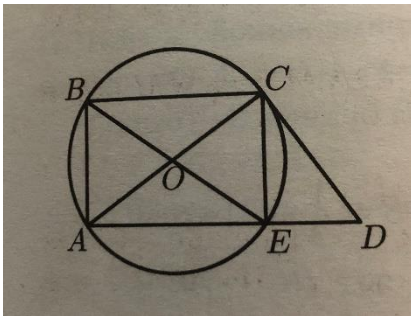
$$AD = \frac{AM}{\cos\alpha} = 3\sqrt{10x} \;\;\Longrightarrow\;\; \frac{AD}{BE} = \frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

Поэтому искомое отношение равно 2.

Ответ: 2.

№3

Через вершины A, B и C трапеции ABCD ($AD \parallel BC$) проведена окружность. Известно. Что окружность касается прямой CD, а ее центр лежит на диагонали AC. Найдите площадь трапеции ABCD , если $BC = 2, AD = 8$. Ответ округлите до целого.



Первый способ.

Так как окружность касается прямой CD, а точка C лежит на окружности, то касание происходит в точке C, значит, угол ACD прямой. Два прямоугольных треугольника - ΔABC и ΔACD – подобны ($\angle BCA = \angle CAD$), отсюда:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD} \iff \frac{2}{AC} = \frac{AC}{8} \iff AC^2 = 16 \Rightarrow AC = 4 \Rightarrow BA = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2+8) \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

И т.к. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, то $S_{ABCD} \approx 17$.

Ответ: 17.

Второй способ.

Так как окружность касается прямой CD, то по свойству касательной и секущей имеем:

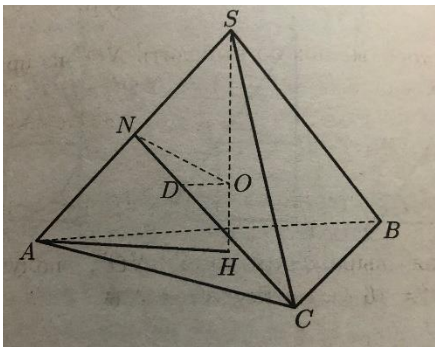
$$DC^2 = AD \cdot ED = AD \cdot (AD - BC) = 8 \cdot 6 = 48, \text{тогда } CE^2 = DC^2 - DE^2 == 48 - 36$$
$$= 12, \text{откуда следует, что } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (2+8) \cdot \sqrt{12} == 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $\mathbf{10\sqrt{3} \approx 17}$.

3. Стереометрические задачи из ЕГЭ. (5 задач)

№4

В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания равна $4\sqrt{3}$, высота пирамиды равна 12. Точки N, K, M являются серединами соответственно боковых ребер AS, BS, CS. Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и прямых AK, CN и BM.



Пусть SABC – данная правильная пирамида (высота проектируется в ее центр), SH – ее высота, причем H – центр основания и $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 4$.

По условию AN = NS.

Пусть O – центр заданного шара, D – точка касания шара прямой CN. Треугольник ASH прямоугольный, откуда следует, что $SA = \sqrt{144+16} = 4\sqrt{10}$ и, следовательно, $AN = SN = 2\sqrt{10}$. В треугольнике SAC:

$$\cos\angle SAC = \frac{AC}{2AS} = \frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}.$$

По теореме косинусов в треугольнике ACN получаем:

$$NC^2 = AC^2 + AN^2 - 2AC\cdot AN\cdot\cos\angle SAC = 48 + 40 - 2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = 64$$

$$\Rightarrow\ \ NC = 8$$

Рассмотрим треугольник NSO. Косинус угла NSO найдем из прямоугольного треугольника ASH:

$$\cos\angle NSO = \frac{SH}{SA} = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Выразим теперь NO^2 по теореме косинусов, имея в виду, что OH – искомый радиус:

$$NO^2 = (NC - CD)^2 + r^2 = (8-4)^2 + r^2 = 16 + r^2$$

С другой стороны, можно выразить NO^2 из прямоугольного треугольника NDO: $NO^2 = ND^2 + DO^2$. Учтем, что CD = CH как касательные к шару, проведенные из одной точки, и что CH = AH = 4:

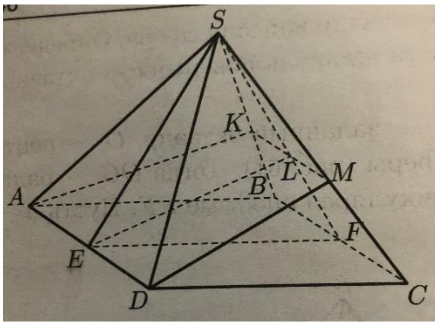
$$NO^2 = (NC - CD)^2 + r^2 = (8-4)^2 + r^2 = 16 + r^2.$$

Приравнивая выражения для NO^2, получаем, что $40 - 12r + r^2 = 16 + r^2$, откуда $r = 2$.

Ответ: 2.

№5

Найдите двугранный угол (в градусах) при основании правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит и этот угол, и боковую поверхность пирамиды пополам.



Пусть SABCD – данная правильная пирамида, тогда вершина проектируется в центр основания. Проведем апофему SE в грани ASD и EF перпендикулярно AD. Тогда угол SEF будет искомым двугранным углом, который обозначим буквой α. Пусть AKMD – заданная плоскость, EL – перпендикуляр к AD в этой плоскости, тогда EL делит угол SEF пополам.

Рассмотрим треугольник BSC. Плоскость AKMD проведена через прямую AD, параллельную прямой BC, поэтому она пересекает грань SBC по прямой KM, параллельной BC. Отсюда следует, что треугольники SKM и SBC подобны.

Обозначим коэффициент подобия буквой k.

Тогда $\frac{SL}{SF} + \frac{SM}{SC} = k$, а $\frac{S_{SDM}}{S_{SDC}} = k$ т.к. эти треугольники имеют одну и ту же высоту.

Так как пирамида правильная, то

$$\frac{EF}{2} = SE\cos\alpha \ \Leftrightarrow\ \frac{EF}{SE} = 2\cos\alpha.$$

Рассмотрим теперь треугольник SEF, в котором EL – биссектриса. По свойству биссектрисы $\frac{SL}{LF} = \frac{SE}{EF} = \frac{1}{2\cos\alpha}$, тогда $k = \frac{SL}{SF} = \frac{1}{1+2\cos\alpha}$.

По условию

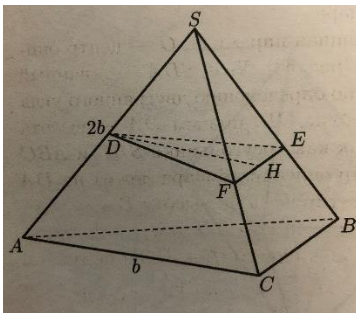
$$4S_{ASB} = 2(S_{ASD} + 2S_{DSM} + S_{SKM}) = 2(S_{ASD} + 2kS_{ASD} + k^2S_{ASD}) \ \Leftrightarrow\ k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow\ k = \sqrt{2} - 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + 2\cos\alpha} \ \Leftrightarrow\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Longrightarrow\ \alpha = 45°.$$

Ответ: 45.

№6

В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна b, а боковое ребро равно 2b, через середину бокового ребра, перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь образовавшегося сечения.



Пусть SABC – данная пирамида, проведем сечение DEF: DE и DF перпендикулярны ребру AS, AD = DS = b. Так как пирамида правильная, то треугольник DEF равнобедренный, т.е. DE=DF, и FE параллельно CB, откуда следует, что треугольник FSE и CSB подобны.

Рассмотрим треугольник SAC. Пусть угол ASC = 2 α, тогда

$$\sin\alpha = \frac{b}{4b} = \frac{1}{4} \ \Longrightarrow\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \ \Longrightarrow\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{8} \ \Longrightarrow\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Найдем DF и SF: $DF = b\operatorname{tg}2\alpha = \frac{b\sqrt{15}}{7}$, $SF = \frac{b}{\cos 2\alpha} = \frac{8b}{7}$.

Из подобия треугольников FSE и CSB следует, что

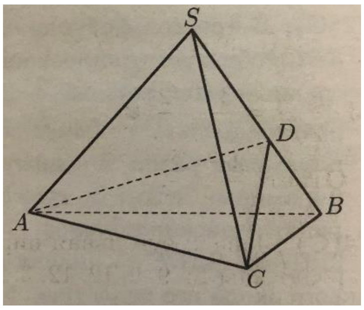
$$\frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SC} \ \Leftrightarrow\ EF = \frac{b \cdot 8b}{7 \cdot 2b} = \frac{4}{7}b$$

Тогда $DH = \sqrt{\frac{15b^2}{49} - \frac{4b^2}{49}} = \frac{b\sqrt{11}}{7}$. Теперь вычисляем площадь сечение: $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4b}{7} \cdot \frac{b\sqrt{11}}{7} = \frac{2b^2\sqrt{11}}{49}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{11}}{49} b^2$.

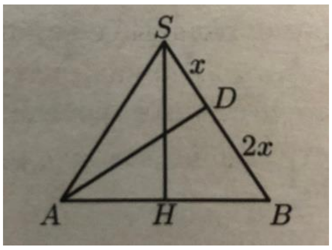
№7

В правильной треугольной пирамиде SABC плоскость, проходящая через сторону AC основания и перпендикулярная ребру SB, отсекает пирамиду DABC, объем которой в полтора раза меньше объема пирамиды SABC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды SABC, если AC = α.



Пусть SABC – данная правильная пирамида, тогда вершина проектируется в центр основания. Опустим из точек A и C на ребро SB перпендикуляры. Так как пирамида правильная, они попадут в одну точку, которую обозначим D. Тогда SB перпендикулярно плоскости ADC, а SD и DB являются высотами в пирамидах SADC и BADC, имеющих общее основание. Поэтому $\frac{V_{ADCS}}{V_{ADCB}} = \frac{SD}{DB}$. По условию

$$V_{SABC} = \frac{3}{2} V_{DABC} \iff \frac{V_{SADC}}{V_{BADC}} = \frac{SD}{DB} = \frac{1}{2}.$$



Рассмотрим треугольник ASB. Проведем в нем высоту SH. Треугольники BSH и ADB подобны, откуда

$\frac{SB}{AB} = \frac{HB}{DB} \iff \frac{3SD}{\alpha} = \frac{\alpha}{2 \cdot 2SD} \iff SD^2 = \frac{a^2}{12} \iff SD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, поэтому $SB = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из треугольника SHB находим SH = $\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, тогда $S_{\text{бок}} = 3 \cdot \frac{a \cdot a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$

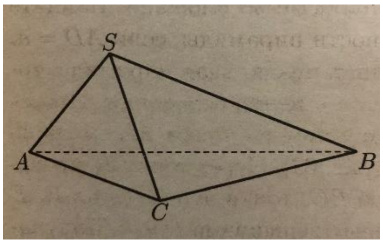
Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

№8

Дана треугольная пирамида, длина ребер которой равны 15, 9, 9, 12, 12, 3. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

Первый способ.

Попробуем разобраться, как устроены грани пирамиды.



Треугольники со сторонами (15, 9, 3), или (15, 12, 3), или (9, 12, 3) не существуют. Значит, могут быть треугольники со сторонами: (15, 9, 12); (15, 9, 9); (15, 12, 12); (9, 9, 12); (9, 12, 12); (9, 9, 3); (12, 12, 3). Числа 15 и встречаются по одному разу и не могут быть сторонами одного треугольника, значит они являются сторонами треугольников, не имеющих общих сторон. Пусть SB – сторона, равная 15, тогда только AC может быть равна 3. Остается единственная возможность: AS = CS, AB = BC. Отсюда следует, что треугольники ASB и CSB равны и имеют стороны длиной 15, 12, 9, а $15^2 = 12^2 + 9^2$, т.е. треугольники прямоугольные с гипотенузой SB.

Точки S, C, B, и A, S, B принадлежат сфере и являются вершинами прямоугольных треугольников. Следовательно, BS – диаметр, значит, радиус равен $\frac{15}{2}$.

Ответ: $\frac{15}{2}$.

III. Заключение

Работа будет интересна тем, кто любопытен, кто любит думать, кто просто любит решать сложные задачи, но не любит длинных ненужных выкладок. а предвидя их, бросает, а любит придумывать новые способы решения известных задач. Работа поможет в проведении факультатива, кому-то поможет оценить свои силы при самостоятельном решении задач.

Они смогут научить и новым методам, и повторить – забытые.

Ведь абитуриенты хуже всего решают задачи по планиметрии и стереометрии. Это объясняется очень просто: планиметрия закончилась в 9 классе, а на повторение нет времени. Стереометрия же не усвоена в связи с тем, что на её изучение недостаточно времени в 11 классе.

Всем желаем успеха!

Автор – Кобаидзе Н. И.

Гимназия №5, г. Владикавказ, РСО – Алания.